

目录

引言	1
首次接触 epsilon-delta 语言	2
一类简单的收敛行为	2
精确描述	3
描述“接近”	3
描述“数值范围”	3
描述“无限变小”	3
描述“随着.....逐渐.....”	4
所以，标准答案是？	4
Cauchy 对收敛的描述方式	4
描述无穷大	4
描述函数的不连续之处	4
扩展题：复函数的收敛	4

引言

众所周知，在数学中一旦涉及到“无限”，就会出现各种看似反直觉的现象，比如 $1 - 0.99999\dots$ 是什么？这个问题用无限不循环小数的符号体系很难回答，因为你无法解释“无限个零的尾端有一个一”这件事中为什么无限个零还会有尾端。但学习了 $\varepsilon - \delta$ 语言（epsilon-delta 语言）后建立了实数集的概念和体系，我们可以精确地描述它。

另一个例子是开集和闭集，为什么 $(0, 1) \subset [0, 1]$ ，右边的比左边的多两个元素 $((0, 1) \cup \{0, 1\} = [0, 1])$ ，但左边的被叫做开集右边的被叫做闭集？这实际上就是“无限趋近于边界”时各种奇怪行为的体现，比如开集的所有元素都有一个不为零的邻域，而闭集在边界上的元素没有。“开闭之争”是拓扑学的基础，这里不再赘述。

$\varepsilon - \delta$ 语言是一种工具，用于形式化地描述分析学中“无限”（无穷大，无穷小，无限接近）相关场景中的各种行为。

这套语言并不是唯一的方式，如一类使用超实数体系的非标分析也可以达到同样的效果（详见莱布尼兹原理），所以真正重要的是“**形式化**”，也即用形式语言严格地、去掉模糊空间地、不多不少地描述一类事情。

首次接触 epsilon-delta 语言

一类简单的收敛行为

这类行为基本是“随着 x 增大, $f(x)$ 逐渐接近于 A ”。有的函数单调地趋近 (如 图 1), 有的则在趋近过程中来回震荡 (如 图 2)。我们要在形式话描述这种行为的过程中引出 $\epsilon - \delta$ 语言。

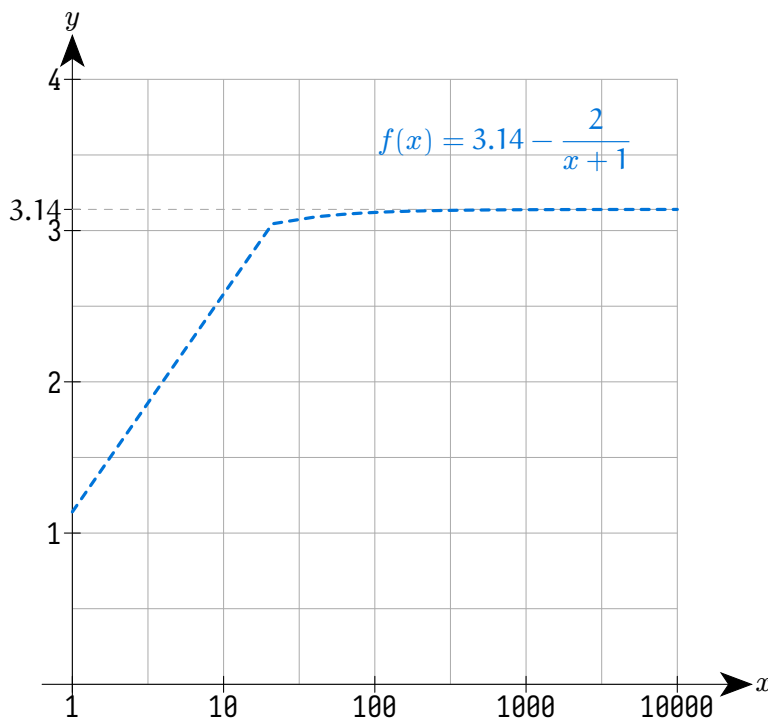


图 1 简单的收敛

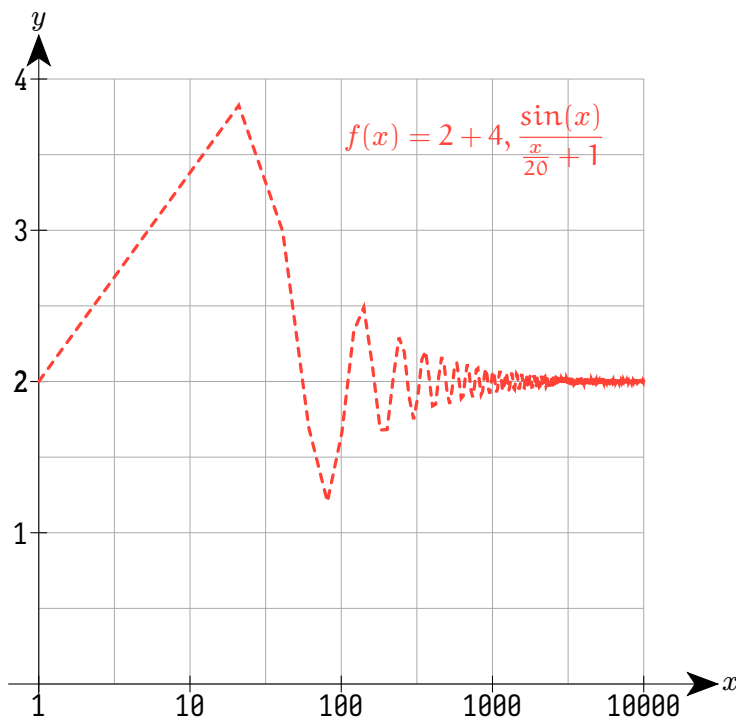


图 2 震荡收敛

精确描述

或者说，把一句自然语言逐渐变成完全的形式化表达。

描述“接近”

起点是一句自然语言——

随着 x 增大， $f(x)$ 逐渐无限接近于常数 A 。

“接近”首先是一个距离概念，因此直觉上可以这么改：

随着 x 增大， $|f(x) - A|$ 逐渐无限变小。

但这个说法只能覆盖图 1 的行为，它描述了一种 $|f(x) - A|$ 平滑降低的过程，跟图 2 这种数值震荡的行为对不上（况且很多随 x 增大而收敛的函数比图 2 震荡多了）。

这说明这一版改的太过了，实际上我们之所以能明确看出图 2 也收敛，是因为虽然 $f(x)$ 随着 x 的增大一直在 A 周围震荡，但震荡的幅度是在逐渐减少的。因此我们实际上是想表达：

随着 x 增大， $|f(x) - A|$ 的数值范围逐渐无限变小。

描述“数值范围”

当定义域为 $x \in [0, \infty)$ 时， $|f(x) - A|$ 的数值范围，也就是它的上下界，其实是固定的。

那么为什么我们直觉上认为在 x 增大时会会有一个随之变小的数值范围呢？实际上我们本能上把定义域 $[0, \infty)$ 看成了 $[0, x]$ 和 $[x, \infty)$ 两部分，而我们认为那个随 x 增大一直在缩小的数值范围实际上是把定义域看成 $x \in [x, \infty)$ 时的数值范围。

因此下一步的改进是：

随着 x 增大， $\sup\{|f(\hat{x}) - A|\} (\hat{x} \in [x, \infty))$ 逐渐无限变小。（当然 $\inf\{|f(x) - A|\} (x \in [x, \infty))$ 是恒为 0 的）

补充： 实际上对于 $x = 1, 2, 3, 4, \dots$ ，有 $[1, \infty) \supset [2, \infty) \supset [3, \infty) \supset [4, \infty) \supset \dots$ ，也就是说随着 x 增大，我们本能地关注的那个定义域 $[x, \infty)$ 在不断“缩小”，在此过程中， $|f(x) - A|$ 的下界固定为 0，而上界天然单调不减。

描述“无限变小”

所谓无限变小，就是不能变小到一定程度就不变小了。用形式语言描述就是不存在 $\varepsilon > 0$ 使得不管 x 多大 $\sup\{|f(\hat{x}) - A|\} (\hat{x} \in [x, \infty))$ 都大于 ε 。换句话说就是对于任意 $\varepsilon > 0$ 都至少存在一个 x 使得 $\sup\{|f(\hat{x}) - A|\} (\hat{x} \in [x, \infty))$ 小于 ε （基于上节补充内容，此时对所有 $y > x$ 也有 $\sup\{|f(\hat{y}) - A|\} (\hat{y} \in [y, \infty))$ ）

因此可以进一步改成：

随着 x 增大， $\sup\{|f(\hat{x}) - A|\} (\hat{x} \in [x, \infty))$ 逐渐小于任意 $\varepsilon > 0$

描述“随着.....逐渐.....”

“随着.....逐渐.....”是一个过于细节的视角，是把 x 从 0 到 ∞ 一点一点看过去的。基于上上节的补充内容， $\sup\{|f(\hat{x}) - A|\} (\hat{x} \in [x, \infty))$ 是单调不减的，虽然我们能保证它最终可以小于任意 $\varepsilon > 0$ ，但完全可能出现把 x 增大了很多之后 $\sup\{|f(\hat{x}) - A|\} (\hat{x} \in [x, \infty))$ 才迟迟变小一点的情况。故而可以“跳步”，只关注那些实质性让 $\sup\{|f(\hat{x}) - A|\} (\hat{x} \in [x, \infty))$ 变小的 x 。

进一步地，甚至也不需要关心那些能让 $\sup\{|f(\hat{x}) - A|\} (\hat{x} \in [x, \infty))$ 变小的 x ，因为它们并不是独一无二的（还记得上一节中括号内的那一句此时对所有 $y > x$ 也有 $\sup\{|f(\hat{y}) - A|\} (\hat{y} \in [y, \infty))$ 吗？），它们只需要存在即可，而“随着 x 增大， $\sup\{|f(\hat{x}) - A|\} (\hat{x} \in [x, \infty))$ 逐渐小于任意 $\varepsilon > 0$ ”本身就确保了它们存在，真正值得关心的就只有 $\sup\{|f(\hat{x}) - A|\} (\hat{x} \in [x, \infty))$ 的变小。

所以有了一个等效于标准答案的版本：

对任意 $\varepsilon > 0$ ，都存在 x ，使得 $\sup\{|f(\hat{x}) - A|\} < \varepsilon (\hat{x} \in [x, \infty))$

所以，标准答案是？

除了把任意换成 \forall ，把存在换成 \exists ，还得把 $\sup\{|f(\hat{x}) - A|\} < \varepsilon (\hat{x} \in [x, \infty))$ 换成 $\forall \hat{x} > x, |f(\hat{x}) - A| < \varepsilon$ ，最后的标准版写成这样：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x, \forall \hat{x} > x, |f(\hat{x}) - A| < \varepsilon.$$

Cauchy 对收敛的描述方式**描述无穷大****描述函数的不连续之处****扩展题：复函数的收敛**