

泛函导论 Erwin

之前读那个线性代数应该这样学也是强调有限维的非常重要。

2.4

粗略看了一下，这章应该是要刷新我的世界观，之前的都太无聊了。

2.4-1 翻译似乎有问题? 原定理的表述是存在一个固定的 c ，它只依赖 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 。这时候还得上 AI，经过一通提问，这里的阅读顺序应该先上 2.4-4，顺便回顾一下 § 1.3 的拓扑概念。另外还需要补充一个 ℓ_1 范数，也即对一组 base $\{x_i\}_n$ 来说，表示一个向量要用 $\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i x_i$ ，那么这个向量在这个 base 下的坐标表示就是 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ，同时它的 ℓ_1 范数就是 $\sum_i |\alpha_i|$

补充完 ℓ_1 范数之后应该立即看 2.4-4，首先不难发现 (2.4.3) 的变体是 $\frac{1}{b}\|x\| \leq \|x\|_0 \leq \frac{1}{a}\|x\|$ ，这个是对称性，传递性也很好验证，自反性更不必说，所以确实是个等价关系。

在我的理解，如果几何学是研究变化中的不变性质，那么拓扑可以理解为几何学的几何学，更关心它定义的质变而非量变。实际上 § 1.3 提到的 $T_{1 \sim 3}$ 是拓扑空间的其中一种定义，它们从度量空间中开集的性质抽象而来，脱离了度量推广开集的概念，所以这三条称之为开集公理，实际上还有闭集公理、邻域系统公理等，它们也可以描述同一个拓扑空间（这几个公理定义的集族是可以互推的）。所以开集公理是为了在拓扑学中脱离度量来描述临近、连续性等概念而准备的语言，我们在这里实际上并不需要关心拓扑学和开集公理，只需要关心空间中等价范数描述的开集族是否全等即可。

现在该回到 2.4-1 了，首先很明显它在说有限维空间中所有范数都和 ℓ_1 范数等价，不论取哪个范数，导出的拓扑空间都相同。（证明见 2.4-5）剩下的重要内容就是 2.4-1 的证明和 2.4-2 了。

可以试试在 2.4-1 的证明中把 base 换成无限大的线性无关组，虽然不严谨。

习题

1. l^2 is what, unknown. 第一个是炒冷饭吗哈哈，不全为零的序列。
2. 没学过惭愧。ai 做出来都是 1。
3. 提过了。

4. 题意是证明开球仍然是开球即可。（闭转开相当于开转闭，与开球仍是开球矛盾）考虑 $a\|x - y\|_0 \leq \|x - y\| \leq b\|x - y\|_0$ 这个等价范数导出的两种度量，对于 $\|\cdot\|$ 中的开球 $x = \|x - y\| < r$ 来说，它与 $\|\cdot\|_0$ 中的两个开球 $a = a\|x - y\|_0 < r$ 和 $b = b\|x - y\|_0 < r$ 的关系是 $b \subseteq x \subseteq a$ ，实际上只要取 $c = \frac{a+b}{2}$ 即可知开球 $c = \|x - y\|_0 < \frac{r}{c}$ 就是 x

上面那个糊出来的思路过于理想化了，实际上等价范数的概念那么粗略，不可能从这个思路出发的，最后去问了 ai。标准的证法是一个范数下的开球是它等价范数下的开集。考虑我们的两个工具（任意开集都可以表达为开球的并，还有开集公理中的任意多个开集的并仍是开集），逻辑链是：在 $\|\cdot\|$ 下的每个开集，也就是一堆开球的并，在 $\|\cdot\|$ 的等价范数下就是一堆开集的并，也就是说开集仍然是开集。然后考虑上段划掉的内容中唯一有价值的东西“如果存在范数 $\|\cdot\|$ 中的开集 x 在等价范数下为闭集的情况，说明 x 的补集（是个闭集）在等价范数下为开集，与我们之前推出的开集仍是开集矛盾”即可。

嗯，那么回到“开球 \rightarrow 开集”的证明，对于 $\|\cdot\|$ 中的开球 $x = \|p - x\| < r$ ，对于 $\forall \hat{x} \in x$ ，需要证明在 $\|\cdot\|_0$ 下存在开球 $y = \|\hat{x} - y\|_0 < \varepsilon$ 满足 $y \subseteq x$ 。

目标是对任意 $\hat{x} \in x$ 构造 ε 使得任意 $y \in y$ 都满足 $\|p - y\| < r$, 考虑等价范数的公式 $\|p - y\| \leq b\|p - y\|_0$, 一个自然的想法就是将目标换成 $b\|p - y\|_0 < r$, 根据度量的三角不等式有 $\|p - y\|_0 \leq \|p - \hat{x}\|_0 + \|\hat{x} - y\|_0 < \|p - \hat{x}\|_0 + \varepsilon$, 所以只要令 $\varepsilon = r/b - \|p - \hat{x}\|_0$ 即可。**(这个证明是错的, 因为无法保证 $\varepsilon > 0$)**

嘛正确的证法读起来还挺简单的但我想不到, 因为我证明的时候是纯不等式, 脑子里没有几何。虽然直觉上想到了几何意义但没有去深思。

不继续写了, 下次再做剩下的题。

参考文献