一个矩阵 A 的列向量标准正交等价于 $A^TA=I$（矩阵 A 可以不是方阵）

说实话，我确实更喜欢“具有单位正交列的矩阵”这种表述。

安德玛的这种构造方法非常惊人，看起来就好像只是把 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 像这样拼在一起：$B=\begin{pmatrix}A & A\\ A & -A\end{pmatrix}$

Gram-Schmidt 方法：

一个向量与一个空间垂直的分量，等于这个向量减去其在这个空间的投影。

正交基让投影变得简单，因为一个向量对一个空间的投影等于其对这个空间所有正交基方向上的投影之和，而对一组普通的基来说不是。

让我们从公式上看看吧，假设 A 的列向量是两两正交且长度为 1 的。

所以投影矩阵就可以化简 $P=A(A^TA)^{-1}A^T=AA^T$，那么 $P\vec{b}$ 也就是

$$
\begin{aligned}
&(\vec{a_1}\ \ \vec{a_2}\ \ ...\ \ \overrightarrow{a_n})\begin{pmatrix}\vec{a_1}^T\\ \vec{a_2}^T\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_n}^T\end{pmatrix}\vec{b}\\
&=(\vec{a_1}\ \ \vec{a_2}\ \ ...\ \ \overrightarrow{a_n})\begin{pmatrix}\vec{a_1}^T\vec{b}\\ \vec{a_2}^T\vec{b}\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_n}^T\vec{b}\end{pmatrix}\\
&=\vec{a_1}\left(\vec{a_1}^T\vec{b}\right)+\vec{a_2}\left(\vec{a_2}^T\vec{b}\right)+...+\overrightarrow{a_n}\left(\overrightarrow{a_n}^T\vec{b}\right)
\end{aligned}
$$

于是就很显然了。

（顺便提一嘴，这种 1x1 矩阵形式的标量最好还是放在右边）

最后说的 $A=QR$ 形式的分解似乎有点 naive，毕竟 Q 是一组基，甚至是标准正交基。

但由于 Q 是 A 从 Gram-Schmidt 方法构造得来的，所以 R 将是一个上三角矩阵。（具体的，对于 Q 的每个列向量 $\vec{q_i}$，它都是由 $\overrightarrow{q_{1\sim i-1}}$ 和 $\vec{a_i}$ 构造而来的，而 $\vec{a_i}$ 就是 $\vec{q_i}$ 加上 $\vec{a_i}$ 在 $\overrightarrow{q_{1\sim i-1}}$ 上的投影之和，那么对于 $\overrightarrow{q_{1\le k<i}}$，这个投影其实就是 $\vec{q_k}\vec{q_k}^T\vec{a_i}$，虽然课上给你的形式看上去不是这样，但你得知道这个式子其实就是 $(\vec{q_k}\cdot\vec{a})\vec{q_k}$，本质是一样的，向量之间的乘法其实是有一些类似于交换律的东西的）