嗯……逆矩阵的公式吗，有点意思，我本以为已经很熟悉它，却不知道它的解析式。

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$$

C 是由代数余子式（cofactors）组成的矩阵，也即 C_{ij} 代表 A_{ij} 的代数余子式。

有意思的是，这个公式的确全都是行列式相关的东西组成的，这让我对行列式更好奇了。

课程中的证明关注的是 $AC^T = (\det A)I$ 这个等式，实际上对于 $(AC^T)_{ii}$，确实显然都是 $\det A$，那么其余部分为什么都是零呢？这很容易让人联想到正交。

有件事没有提，就是伴随矩阵，其实专门起个名还是有用的，他就是某个余子式代表的行列式所对应的矩阵本身（当然要去掉那个正负号）。那么对于 A_{ij} 带表的伴随矩阵，本文临时把它叫做 $B(i,j)$

那么回到我们的具体情况，就是对于所有的 $(AC^T)_{ij}$ （$i \neq j$） 的情况，$(AC^T)_{ij}$ 的具体值是 $A_{i,1}(\pm \det B(j,1)) + A_{i,2}(\pm \det B(j,2)) + ... + A_{i,n}(\pm \det B(j,n))$（这里不要糊涂，注意 A 乘的是 C^T 不是 C），那么具体到 $A_{i,k}(\pm \det B(j,k))$ 的情况，你会发现这是把原矩阵的第 j 行换成了第 i 行后，得到的某个余子式，虽然这个余子式不一定为零，但它们加起来确实为零（因为是一个两行相等的矩阵的 det）。

证毕，但确实没有涉及到正交，依旧只有行列式，这让它看起来更神秘了。

Cramer's Rule

对于 $A\vec{x} = \vec{b}$，可以写成 $\vec{x} = \frac{1}{\det A} C^T \vec{b}$，克拉默法则其实考虑的就是把矩阵的某一列换成 $\vec{b}$ 的行列式。

说实话，$\det$ 这个东西本身的复杂度就不是那种传统的小打小闹的代数可比的了。

这东西连老师都难绷了，我还能说什么呢?

行列式就是在算体积

课上证明的思路非常妙。

首先已经有了单位阵这个特例下的相等，也就是行列式的性质 1 也对计算体积生效，接下来只要证明行列式的性质 2 和性质 3 也在计算体积上生效就行了，因为其它的性质都可以由这三条性质推出来。

对于正交矩阵，$QQ^T = I$，而根据行列式的乘法公式，我们可以很轻松地知道 $\det Q = \pm 1$

为什么性质 3a 和性质 3b 也对非正交的超立方体成立呢?

感觉稍微超出了我的能力范围。以后再还债吧，锻炼去了。